Сегодня у нас будет всего одна задача:

Задача 33.

Представляя условную вероятность $\rho(x'|x,\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ в виде двух слагаемых, характеризующих вероятность брауновской частице за время Δt остаться в точке $x = x'$ и вероятность за это же время с некоторой скоростью перехода $W(x'|x)$ оказаться в точке $x \neq x'$, придать уравнению Смолуховского форму уравнения кинетического баланса.

Будем искать решение уравнение Смолуховского как

$$\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t) = A\text{б}(x - x^I) + \Delta t * \omega(x^I \to x)$$

Где A – амплитуда вероятности остаться в той же точке,

$\omega(x^I \to x)$ – амплитуда вероятности свалить.

В общем случае $\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t)$ в таком виде не представляется – эта формула справедлива лишь для малых Δt. (Позже мы как раз устремим Δt к 0).

Сначала определим A из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t)dx = 1$$

$$A + \Delta t * \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x^I \to x)dx = 1$$

Обозначим $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x^I \to x)dx$ за $a(x^I)$, тогда $A = 1 - \Delta t * a(x^I)$. Подставляем и получаем:

$$\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t) = (1 - \Delta t * a(x^I))\text{б}(x - x^I) + \Delta t * \omega(x^I \to x)$$

Запишем уравнение Смолуховского:

$$\rho(x_0, t_0 \to x, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 t_0 \to x^I, t)\rho(x^I, t \to x, t + \Delta t)dx^I$$

Подставим:

$$\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t) = \left(1 - \Delta t * a(x^I)\right)\text{б}(x - x^I) + \Delta t * \omega(x^I \to x)$$

В правую часть. Получим

$$\rho(x_0, t_0 \to x, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 t_0 \to x^I, t)\left(1 - \Delta t * a(x^I)\right)\text{б}(x - x^I) + \Delta t * \omega(x^I \to x))dx^I$$

Интегрируем:

$$\rho(x_0,t_0\to x,t+\Delta t)=\rho(x_0t_0\to x,t)\big(1-\Delta t*a(x)\big)+\Delta t\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x)dx^I$$
$$=\rho(x_0t_0\to x,t)-\Delta t*a(x)\rho(x_0t_0\to x,t)+\Delta t\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x))dx^I$$

Перепишем это как

$$\frac{\rho(x_0,t_0\to x,t+\Delta t)-\rho(x_0t_0\to x,t)}{\Delta t}=-a(x)\rho(x_0t_0\to x,t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x)dx^I$$

И устремим Δt к 0. Получим

$$\frac{\partial\rho(x_0,t_0\to x,t)}{\partial t}=-a(x)\rho(x_0t_0\to x,t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x)dx^I$$

Вспомним, что $a(x^I)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x^I\to x)dx$. Нам нужно не $a(x^I)$, а $a(x)$, поэтому сделаем небольшую замену переменных: $a(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x\to x^I)dx^I$. Тогда получим

$$\frac{\partial\rho(x_0,t_0\to x,t)}{\partial t}=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x)-\rho(x_0t_0\to x,t)\omega(x\to x^I)\big)dx^I$$

Это и есть уравнение кинетического баланса.

Физический смысл:

$\frac{\partial\rho\,(x_0,t_0\to x,t)}{\partial t}$ - приращение плотности частиц

$\rho(x_0t_0\to x^I,t)*\omega(x^I\to x)$ – поток налетающих

$\rho(x_0t_0\to x,t)\omega(x\to x^I)$ - поток улетающих